Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
05/06/2013. Durée 3h

EXAMEN - session **2**
ANALYSE 3

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours/applications. (3,5 points)

1) Longueur d'une courbe de classe $\mathscr{C}^1$.

(i) Définition

(ii) Exprimer la longueur en fonction d'une intégrale.

(iii) Calculer la longueur de la courbe

$$\vec{\gamma} \quad \left| \begin{array}{ccc} \big[0, \pi/2\big] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \Big(\mathrm{e}^t \cos(t), \mathrm{e}^t \sin(t)\Big) \end{array} \right.$$

Exercice 1. (3,5 points)

Soit $d \geqslant 1$ un entier. On note (comme d'habitude) $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus d.

1) Montrer que les applications $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|_1$ suivantes définissent bien chacune une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$:

a) $\|P\| = |P(0)| + \sup\limits_{t \in [0,1]} |P'(t)|$.

b) $\|P\|_1 = \displaystyle\int_0^1 \Big|P(x)\Big|\, dx$.

2) En déduire qu'il existe $C_d \geqslant 0$ tel que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$:

$$\sup_{t \in [0,1]} |P'(t)| \leqslant C_d \int_0^1 \Big|P(x)\Big|\, dx.$$

Exercice 2. (4,5 points)

On se place dans $\mathbb{R}^n$ (muni d'une norme). Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on dira que x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x contient un élément de A, distinct de x.

1) (exemples) On se place ici dans le cas $n = 1$.

a) On considère l'ensemble $A = \{0\} \cup]1, 2]$. Les points suivants sont-ils des points d'accumulation de A ? (justifier) : 0 ; 1 ; 2.

b) Quels sont les points d'accumulation de $A = \left\{ \frac{1}{n+1} |\ n \in \mathbb{N} \right\}$? (justifier)

2) Soit x est un point d'accumulation de A. Montrer qu'en fait tout voisinage de x contient une infinité d'éléments de A.

3) On notera A' l'ensemble des points d'accumulation d'une partie A de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\overline{A} = A \cup A'$.

b) Soit K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ et A une partie infinie de K. Montrer que A' est non vide.

Exercice 3. (5 points)

Étudier et tracer la courbe paramétrée d'équation polaire $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta) - \cos(\theta)}$.

Exercice 4. (4 points)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on considère $\Phi(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } (x, y) = \vec{0} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\left|\Phi(x, y)\right| \leqslant \|(x, y)\|_2^2$ et en déduire que Φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer les dérivées partielles de Φ en $(x, y) \neq \vec{0}$.

3) Calculer les dérivées partielles de Φ en $\vec{0}$.

4) Est-ce que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?