Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
06/03/2012.
Durée 3h

EXAMEN - session **2**
ANALYSE 3

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (4 points=2+2)

Soit γ une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^2$.

1) Rappeler la définition de l'abscisse curviligne σ d'une courbe paramétrée (birégulières de classe C^2) et la relation qui relie le rayon de courbure R, σ et φ, l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{T}$ (le vecteur tangent).

2) Enoncer le théorème des fonctions implicites.

Exercice 1. (4 points)

Étudier et tracer la courbe paramétrée $\gamma = (x, y)$ avec $\begin{cases} x(t) & = & \cos(t) \\ y(t) & = & \dfrac{\sin^2(t)}{2+\sin(t)} \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

On pourra exploiter la périodicité et comparer $\gamma(t)$ avec $\gamma(\pi - t)$ pour réduire l'intervalle d'étude à $\big[-\pi/2, \pi/2\big]$.

On prêtera une attention particulière au point de paramètre $t = 0$.

Exercice 2. (4,5 points=1,5+1,5+1,5)

On se place dans $\mathbb{R}^d$ (où $d \geq 1$), muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soient A et B deux parties (non vides) de $\mathbb{R}^d$. On rappelle que $A + B = \big\{a + b \mid a \in A,\, b \in B\big\}$.

1) On suppose que B est ouvert. Montrer que $A + B$ est ouvert.
(*Indication: on pourra considérer un élément $a+b$ de $A+B$ et utiliser en b le caractère ouvert de B*).

2) On suppose que A est fermé et B est compact. Montrer que $A + B$ est fermé.
(*Indication: on pourra considérer une suite $\big(x_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A + B$ convergente vers $x \in \mathbb{R}^d$. Écrire x_n sous la forme $a_n + b_n$ et exploiter la compacité de B*).

3) On suppose que A et B sont compacts. Montrer que $A + B$ est compact.

Exercice 3. (7,5 points=(1+1+0,5)+(1+1+1+1+1))

1) Soient Ω un ouvert (non vide) de $\mathbb{R}^d$ (où $d \geq 1$) et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Soient $a \in \Omega$ et $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$.

(i) Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$, on a $a + t\vec{v} \in \Omega$.

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} [-\alpha,\alpha] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f\big(a+t\vec{v}\big) \end{array}$

(ii) Justifier que Φ est dérivable et exprimer $\Phi'(0)$ en fonction de f.

b) On suppose que f admet en $a \in \Omega$ un minimum: pour tout $x \in \Omega$, on a $f(x) \geq f(a)$. Montrer que toutes les dérivées partielles de f en a sont nulles.

2) Soient $\lambda \in]0,1[$ et $f(x,y) = \big(x + \lambda \sin(y), y + \lambda \sin(x)\big)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que f est injective.

b) Exprimer la jacobienne $J_f(x,y)$ en tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et montrer qu'elle est inversible.

c) On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et on considère $\Delta(x,y) = \Big(x + \lambda \sin(y) - a\Big)^2 + \Big(y + \lambda \sin(x) - b\Big)^2$.

(i) Justifier que Δ admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) En déduire que $x_0 + \lambda \sin\big(y_0\big) = a$ et $y_0 + \lambda \sin\big(x_0\big) = b$.

d) Conclure que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.