Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.

EXAMEN - session **1**
ANALYSE 3
Éléments de correction

Exercice 1.

On utilise le théorème de composition. On note $\rho = \rho(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$ et on a donc pour tout $1 \leq j \leq n$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x_1 + \ldots + x_n\,, \rho(x_1, \ldots, x_n)\Big) + \frac{x_j}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x_1 + \ldots + x_n\,, \rho(x_1, \ldots, x_n)\Big).$$

Donc

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(x_1 + \ldots + x_n\,, \rho(x_1, \ldots, x_n)\Big) + \frac{x_j}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big(x_1 + \ldots + x_n\,, \rho(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

$$+ \frac{\sum\limits_{i \neq j} x_i^2}{\rho^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x_1 + \ldots + x_n\,, \rho(x_1, \ldots, x_n)\Big) + \frac{x_j}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big(x_1 + \ldots + x_n\,, \rho(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

$$+ \frac{x_j^2}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(x_1 + \ldots + x_n\,, \rho(x_1, \ldots, x_n)\Big).$$

Or le théorème de Schwarz donne $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et on obtient finalement:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n-1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x_1 + \ldots + x_n\,, \rho(x_1, \ldots, x_n)\Big) + n \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(x_1 + \ldots + x_n\,, \rho(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

$$+ 2\frac{(x_1 + \cdots + x_n)}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big(x_1 + \ldots + x_n\,, \rho(x_1, \ldots, x_n)\Big) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(x_1 + \ldots + x_n\,, \rho(x_1, \ldots, x_n)\Big).$$

Exercice 2.

1) Pour $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{v}\| = \sup\limits_{t \in [0,1]} \Big| \sum\limits_{k=1}^{n} v_k t^k \Big|$ est d'abord bien défini (sup d'une fonction continue, ou tout simplement par majoration brutale via inégalité triangulaire). On constate que $\|\vec{v}\| = \sup\limits_{t \in [0,1]} \Big| \sum\limits_{k=1}^{n} v_k t^k \Big| \geq 0$ et que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda.\vec{v}\| = |\lambda|.\|\vec{v}\|$.

Pour $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, on a $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \sup\limits_{t \in [0,1]} \Big| \sum\limits_{k=1}^{n} (v_k + w_k) t^k \Big| = \sup\limits_{t \in [0,1]} \Big| \sum\limits_{k=1}^{n} v_k t^k + \sum\limits_{k=1}^{n} w_k t^k \Big|$ or pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} v_k t^k + \sum_{k=1}^{n} w_k t^k \Big| \leq \Big| \sum_{k=1}^{n} v_k t^k \Big| + \Big| \sum_{k=1}^{n} w_k t^k \Big| \leq \sup_{t \in [0,1]} \Big| \sum_{k=1}^{n} v_k t^k \Big| + \sup_{t \in [0,1]} \Big| \sum_{k=1}^{n} w_k t^k \Big|$$

donc $\|\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$.

Enfin, si $\|\vec{v}\| = \sup_{t\in[0,1]} \left|\sum_{k=1}^{n} v_k t^k\right| = 0$, alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $\sum_{k=1}^{n} v_k t^k = 0$. On peut invoquer l'algèbre: si le polynôme $\sum_{k=1}^{n} v_k X^k$ était non nul, il devrait avoir au plus n racines or il en a une infinité: $[0,1]$. Mais on a plus simplement par dérivation (n fois): $n!\, v_n = 0$ donc $v_n = 0$. On peut recommencer et obtenir successivement $v_{n-1} = \ldots = v_1 = 0$. Ainsi $\vec{v} = \vec{0}$.

2) $\|.\|_1$ est aussi une norme sur $\mathbb{R}^n$ (cours) donc on obtient le résultat en invoquant simplement l'équivalence des normes en dimension finie.

Exercice 3.

On étudie la courbe sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2/3\}$.

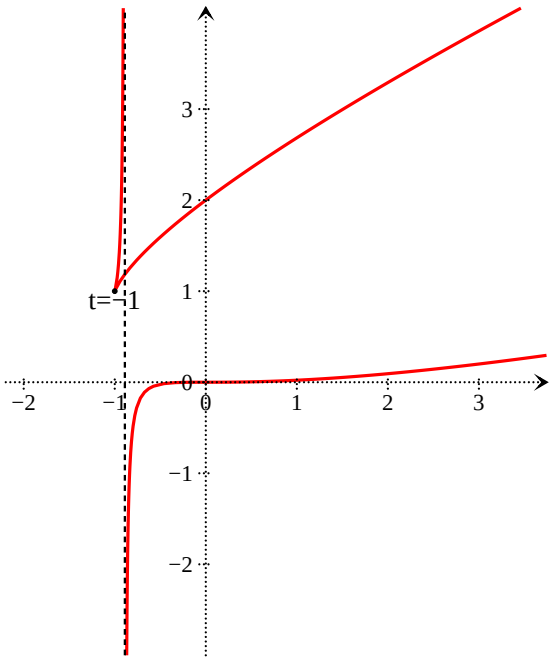
Pour $t \in \mathcal{D}$, on a $x'(t) = 2(t+1)$ et $y'(t) = \dfrac{6t^2(t+1)}{(3t+2)^2}$. D'où le tableau de variation:

t	$-\infty$		-1		$-2/3$		0		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$	$\|$		$+$		
x	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-8/9$		$\nearrow$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$+$	

Le point associé à $t = -1$ est un point stationnaire. Après calculs (par ex DL au voisinage de -1 pour y): $\Gamma''(-1) = (2,6)$ et $\Gamma^{(3)}(-1) = (0,48)$ donc $(p,q) = (2,3)$ donc c'est un point de rebroussement de première espèce. En ce point la tangente est donc dirigée par le vecteur $(2,6)$.

Pour les asymptotes: $X = -8/9$ apparaît grâce au tableau. D'autre part, $\lim_{\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1/3$ puis $y(t) - \dfrac{1}{3}x(t) \sim -\dfrac{8}{9}t$ au voisinage de ∞ donc on a des branches paraboliques dirigées par la droite $Y = \dfrac{1}{3}X$.

D'où la courbe:



Exercice 4.

1) , 2) , 3) cf. cours.

4) $a \to \|x-a\|$ est continue sur le compact A donc atteint ses bornes, en particulier sa borne inférieure (qui est justement $d_A(x)$) : il existe donc $\alpha \in A$ tel que $d_A(x) = \|x-\alpha\|$.

5)

(i) Si $a \in A \setminus K$, on a $\|x-a\| > R = \|x-u\| \geq d_A(x)$. Ainsi

$$\inf\{\|x-a\|;\ a \in A \setminus K\} \geq d_A(x)$$

d'où

$$min\Big(\inf\{\|x-a\|;\ a \in A \cap K\}, \inf\{\|x-a\|;\ a \in A \setminus K\}\Big) = \inf\{\|x-a\|;\ a \in A \cap K\}.$$

Donc

$$d_A(x) = \inf\{\|x-a\|;\ a \in A\} = \inf\{\|x-a\|;\ a \in A \cap K\} = d_{K\cap A}(x).$$

(ii) Par exemple: K est fermé donc $K \cap A$ aussi comme intersection de fermés. Comme K est borné, a fortiori, $K \cap A \subset K$ aussi. Ainsi $K \cap A$ est compact (car fermé borné en dimension finie).

(iii) On applique le 4.: $K \cap A$ est compact donc il existe un $\alpha \in K \cap A$ tel que $d_{K\cap A}(x) = \|x-\alpha\|$. Ainsi $\alpha \in A$ et avec le i.: $d_A(x) = d_{K\cap A}(x)$, donc on obtient $d_A(x) = \|x-\alpha\|$.