Licence de Mathématiques.
Université d'Artois.
11/01/2012.
Durée 3h

EXAMEN - session **1**
ANALYSE 3

Les calculatrices et les documents sont interdits.
La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Cours. (4 points=1,5+1+1,5)

1) Donner la définition d'une application différentiable.
2) Énoncer le théorème de Schwarz.
3) Longueur d'une courbe de classe $\mathcal{C}^1$.
   (i) Définition
   (ii) Exprimer la longueur en fonction d'une intégrale.

Exercice 1. (2 points)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On définit

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f\Big(x_1 + \ldots + x_n \, , \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}\Big) \end{array} \right.$$

Calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2}(x_1, \ldots, x_n)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 2. (3 points=1,5+1,5)

Pour $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\|\vec{v}\| = \displaystyle\sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{k=1}^{n} v_k t^k \right|$ et $\|\vec{v}\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |v_k|$.

1) Montrer que $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{v} & \longmapsto & \|\vec{v}\| \end{array} \right.$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer qu'il existe $c_n > 0$ tel que pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$: $\quad \|\vec{v}\|_1 \leq c_n \|\vec{v}\|$.

Exercice 3. (4 points)

On considère la courbe paramétrée Γ : $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & t(t+2) \\ y(t) & = & \dfrac{t^3}{3t+2} \end{array} \right.$

Étudier puis tracer Γ.

Exercice 4. (7 points=1+1,5+1+1+(1+1+0,5))

$\mathbb{R}^d$ est muni d'une norme $\|.\|$. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^d$.

1) Rappeler la définition de $d_A(x)$, la distance de $x \in \mathbb{R}^d$ à A.

2) Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^d$, $\big|d_A(x) - d_A(y)\big| \leq \|x - y\|$. En déduire que la fonction d_A est continue sur $\mathbb{R}^d$.

3) Identifier $d_A^{-1}(\{0\})$.

4) On suppose que A est compact. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $\alpha \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - \alpha\|$.

5) On suppose que A est fermé et on considère $u \in A$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$.

(i) On pose $R = \|x - u\|$ et on note K la boule fermée de centre x et de rayon R. Montrer que $d_A(x) = d_{K\cap A}(x)$.

(ii) Montrer que $K \cap A$ est compact.

(iii) En déduire qu'il existe $\alpha \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - \alpha\|$.